Painleve V型タイプの方程式のτ函数について (線型微分方程式の変形理論とアーベル函数論の拡張への新しい視点)

毛織, 泰子

数理解析研究所講究録
388巻 1980年 84-101

Painlevé V型タイプの方程式のτ函数について

琉球大 理　　毛織 泰子

1.　$x=a_1,\cdots,a_r$ に確定特異点，$x=\infty$ に1級不確定特異点をもつ1階線型常微分方程式

(1.1)　$\frac{d}{dx}Y=\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{B_j}{x-a_j}+C\right)Y$

（B_j, C は $r\times r$ 定数行列，B_j は高々ランク1，$C=\begin{pmatrix}c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_r\end{pmatrix}$）

を考える。$A \underset{\mathrm{def.}}{=} \begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r\end{pmatrix}$ とし，Q, Pを各々，B_j の固有値 $\lambda_j \underset{\mathrm{def.}}{=} \mathrm{trace}\, B_j$ に属する固有列ベクトル，固有行ベクトル $(j=1,\cdots,r)$ から成る行列とすれば，(1.1) は

(1.2)　$\frac{d}{dx}Y=\left(Q(x-A)^{-1}P+C\right)Y$

と書ける。$B_j=QE_jP$，$E_j \underset{\mathrm{def.}}{=} \begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}(j$ の関係があり，(1.1) と (1.2) は同等である。$\kappa_1,\cdots,\kappa_r$ を行列 $B \underset{\mathrm{def.}}{=} \sum_{j=1}^{r}B_j=QP$ の対角線要素とすれば（これを $\begin{pmatrix}\kappa_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \kappa_r\end{pmatrix}=\mathrm{diag}\,B$ のように略記する），$\sum_{j=1}^{r}\kappa_j=\sum_{j=1}^{r}\lambda_j$ である。$K=\begin{pmatrix}\kappa_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \kappa_r\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{pmatrix}$ とおく。

この方程式 (1.1) 又は (1.2) の，モノドロミー構造を変えない変形を考える [5], [6], [7], [11], [12], [13], [14], [15]。(1.2) を

(1.3)　$\mathcal{L}Y=0$，$\mathcal{L}=Q(x-A)Q^{-1}\left(\frac{d}{dx}-C\right)-B=\left(\frac{d}{dx}-C\right)Q(x-A)Q^{-1}-B'$

(1.4) $\quad B' = 1 + B - [QAQ^{-1}, C]$

の形に書くとき，線型方程式(1.3)に次の方程式

(1.5) $\quad dY = \Omega Y, \quad \Omega = -Q\,dA\cdot Q^{-1}\left(\frac{d}{dx} - C\right) + x\,dC + \Theta, \quad \Theta_{ij} \underset{\mathrm{def.}}{=} \begin{cases} 0 & (i=j) \\ (QP)_{ij}\, d\log(c_i - c_j) & (i \neq j) \end{cases}$

(d は $A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_r \end{pmatrix}$ に関する外微分) を付け加えたホロノミック系の完全積分可能条件は

(1.6) $\quad d\mathcal{L} = \Omega^* \mathcal{L} - \mathcal{L}\Omega, \quad \Omega^* = \Omega - [Q\,dA\cdot Q^{-1}, C] - [QAQ^{-1}, dC]$

である。今，$Q = (Q_{ij})$, $P = (P_{ij})$ の Poisson bracket を

(1.7) $\quad \{Q_{ij}, P_{kl}\} = \delta_{il}\delta_{jk}, \quad \{Q_{ij}, Q_{kl}\} = 0, \quad \{P_{ij}, P_{kl}\} = 0$

と定義し，又 1 form ω を

(1.8) $$\omega(A, C) = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} (PQ)_{ij}(PQ)_{ji}\, d\log(a_i - a_j) + \sum_{i,j} Q_{ij}P_{ji}\, d(a_j c_i) + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} (QP)_{ij}(QP)_{ji}\, d\log(c_i - c_j)$$

と定義すれば，Hamilton の運動方程式

(1.9) $\quad dQ = \{Q, \omega\}, \quad dP = \{P, \omega\}$

i.e. $dQ = Q\Theta^* + dC\cdot QA + CQ\,dA + \Theta Q, \quad dP = -\Theta^* P - AP\,dC - dA\cdot PC - P\Theta,$

($\Theta^*_{ij} \underset{\mathrm{def.}}{=} \begin{cases} 0 & (i=j) \\ (PQ)_{ij}\, d\log(a_i - a_j) & (i \neq j) \end{cases}$) は積分可能条件(1.6)を与え，(1.1)のモノドロミー保存変形を記述する[6],[7],[8],[14]

(1.9)の解 Q, P に対して 1 form ω は closed：$d\omega = 0$ となり

(1.10) $\quad \omega(A, C) = d\log\tau(A, C)$

からτ函数が定数倍を除いて一意に定まる[6],[7]。

$Y(x)$ を(1.1)の確定特異点 $x = a_j$ における non trivial な指数 λ_j をもつ局所解(列)ベクトル($j = 1, \cdots, r$)から成る行列，$Y^{(\infty)}(x)$ を不確定

特異点 $x=\infty$ に於ける指数 $\kappa_1, \cdots, \kappa_r$ の形式解(列)ベクトルから成る行列で

$$(1.11) \quad Y(x) = Q \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \frac{(x-A)^{\Lambda+n}}{(\Lambda+n)!} e^{C(x-A)} \quad , Y_0 = 1 ,$$

$$Y^{(\infty)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\infty)} (x-A)^{K-n} e^{Cx} \quad , Y_0^{(\infty)} = 1$$

の表示をもつものとする。これから再び

$$(1.12) \quad \Lambda = \mathrm{diag}\, PQ, \quad K = \mathrm{diag}\, QP$$

が従い (1.9) から $d\Lambda = dK = 0$ 即ち $\lambda_1, \cdots, \lambda_r, \kappa_1, \cdots, \kappa_r$ は (1.9) の積分定数である。

この方程式 (1.2) に関して特徴的な一つのことは (1.3) の表示からわかるように 形式的 Laplace 変換

$$(1.13) \quad \frac{d}{dx} \mapsto y, \quad x \mapsto -\frac{d}{dy}, \quad Y \mapsto \hat{Y}$$

に関して閉じていることである:

<u>定理 1.1</u>　方程式 (1.2) は形式的 Laplace 変換 (1.13) により

$$(1.14) \quad \frac{d}{dy} Z = (\hat{Q}(y-C)^{-1}\hat{P} - A) Z , \quad \hat{Q} = Q^{-1}, \ \hat{P} = -BQ, \ Z = Q^{-1}\hat{Y}$$

に変換される。即ち Laplace 変換は方程式の係数については

$$(1.15) \quad (Q, P, A, C) \longmapsto (\hat{Q}, \hat{P}, C, -A)$$

の置きかえを意味する。(1.12) は (1.16) に変わる。

$$(1.16) \quad \mathrm{diag}\, \hat{Q}\hat{P} = -(1+\Lambda), \quad \mathrm{diag}\, \hat{P}\hat{Q} = -(1+K) .$$

<u>定理 1.2</u>　$\hat{Q}, \hat{P}$ は Q, P の正準変換である。従って変形方程式 (1.9) は変換 (1.15) で変わらない。

(1.15) は (1.17) と (1.18) の合成である。

(1.17) $(Q, P, A, C) \longmapsto (P, -Q, C, -A)$ (正準変換),

(1.18) $(Q, P, A, C) \longmapsto (-\hat{P}, \hat{Q}, A, C)$.

2. (1.4) と (1.14) から

(2.1) $Q' = -\hat{P} = (1 + QP - [QAQ^{-1}, C])Q, \quad P' = \hat{Q} = Q^{-1}$

とおけば、変換 (1.18) は (2.1) $(Q, P) \longmapsto (Q', P')$ の変換であり、逆変換は (2.2) で与えられる。

(2.2) $Q = P'^{-1}, \quad P = P'(-1 + Q'P' + [P'^{-1}AP', C])$.

Q, P, A, C で定義される量 $F = f(Q, P, A, C)$ に対して $F' = f(Q', P', A, C)$ と書く。例えば、$B = QP$ に対して $B' = Q'P'$ で、これは (1.4) とも一致する。

(1.8) と (2.1) から恒等式

(2.3) $\omega' - \omega = \mathrm{trace}\,(QAQ^{-1}dC + Q^{-1}CQdA)$

を得、これと (2.1) とから

(2.4) $(\mathrm{trace}\,P'dQ' - \omega') - (\mathrm{trace}\,PdQ - \omega) = d\,(\mathrm{trace}\,Q^{-1}(Q' - CQA) + \log\det Q)$

を得る。$Q = P'^{-1}$ と Q' とは独立だから (2.4) は (2.1) 即ち (1.18) が正準変換であることを示している。

(2.5) $\Lambda' = \mathrm{diag}\,P'Q' = 1 + \Lambda, \quad K' = \mathrm{diag}\,Q'P' = 1 + K$

だから、(1.9) の解 Q, P に対して、(2.1) の変換で、$x = a_j$ での指数 $\lambda_j, 0, \cdots, 0$ は $\lambda_j + 1, 0, \cdots, 0$ に $(j = 1, \cdots, r)$、$x = \infty$ での指数 $\kappa_1, \cdots, \kappa_r$ は $\kappa_1 + 1, \cdots, \kappa_r + 1$ になる。(2.1) の変換は、他方、線型方程式 (1.2) の変換 (Schlesinger 変換 [2], [12], [14], [15])

(2.6) $\quad Y' = Q(x-A)Q^{-1}Y$

(その逆変換は (1.3) の第 2 式から

(2.7) $\quad Y = P'^{-1}Q'^{-1}(\frac{d}{dx}-C)Y' \quad$)

により、係数の間の変換としても得られる：

<u>定理 2.1</u> Schlesinger 変換 (2.6) により方程式 (1.3) 及び (1.5) は $\mathcal{L}'Y'=0$ 及び $dY' = \Omega'Y'$ に変換される。特に (1.2) は

(2.8) $\quad \frac{d}{dx}Y' = (Q'(x-A)^{-1}P'+C)Y' = (\sum_{j=1}^{r}\frac{B_j'}{x-a_j}+C)Y',$

に、解 (1.11) は

(2.9) $\quad Y'(x) = Q'\sum_{n=0}^{\infty}Y_n'\frac{(x-A)^{1+\Lambda+n}}{(1+\Lambda+n)!}e^{C(x-A)} \quad , Y_0'=1,$

$\quad\quad Y^{(\infty)\prime}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}Y_n^{(\infty)\prime}(x-A)^{1+K-n}e^{Cx} \quad , \quad Y_0^{(\infty)\prime}=1$

に変換され、Q', P' は (2.1) で与えられる。

変形方程式 (1.9) から、$d\log\det Q = \mathrm{trace}\,(QAQ^{-1}dC + Q^{-1}CQdA)$ となる。(2.3) と比較して、$d\log\tau' - d\log\tau = d\log\det Q$. 故に、τ 函数の定数倍を適当に正規化して

<u>定理 2.2</u> (2.10) $\quad \frac{\tau'}{\tau} = \det Q$.

方程式 (1.2) は対角行列 D_1, D_2 による変換：

(2.11) $\quad Y \mapsto D_1Y, \quad Q \mapsto D_1QD_2^{-1}, \quad P \mapsto D_2PD_1^{-1}$ （従って、$QP \mapsto D_1QPD_1^{-1}$, $PQ \mapsto D_2PQD_2^{-1}$）

の自由度がある。このとき $\det Q \longmapsto \frac{\det D_1}{\det D_2}\cdot\det Q$ となるので、(2.10) で、τ 函数の定数倍に影響がある。

$Q, P, F = f(Q,P,A,C)$ (resp. Y) から (2.1) (resp. (2.6)) により、n 回変換したものを $Q^{(n)}, P^{(n)}, F^{(n)} = f(Q^{(n)}, P^{(n)}, A, C)$ (resp. $Y^{(n)}$) と書く。

$n=1,2,\cdots$ に対して $F^{(n)}$ を $F', F'', \cdots$ のように書くこともある。

$nr\times nr$ 行列 $R_n \underset{\mathrm{def.}}{=} (R_{ij})_{i,j=0,1,\cdots,n-1}$ を次のように定義する。

(2.12) R_{ij} は $r\times r$ 行列, $R_{00}=Q$, $R_{0,j+1}=CR_{0j}$, $R_{i+1,0}=R_{i0}A$,

$$R_{i+1,j}=R_{ij}A+jR_{i,j-1}+\sum_{k=0}^{j-1}R_{i,j-1-k}PC^kQ \qquad (j=1,2,3,\cdots).$$

例.
$$R_3=\begin{pmatrix} Q & CQ & C^2Q \\ QA & CQA+Q+QPQ & C^2QA+2CQ+CQPQ+QPCQ \\ QA^2 & CQA^2+2QA+QPQA+QAPQ & C^2QA^2+4CQA+2Q+CQPQA+CQAPQ+QPCQA+QAPCQ+3QPQ+QPQPQ \end{pmatrix}.$$

R_n の分解：

(2.13)$_n$
$$R_n=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ QAQ^{-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ QA^{n-1}Q^{-1} & \cdots & QAQ^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & Q'AQ'^{-1} & \ddots & & \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \\ & Q'A^{n-2}Q'^{-1} & \cdots & Q'AQ'^{-1} & 1 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & Q^{(n-2)}A(Q^{(n-2)})^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & & & & \\ & Q' & & & \\ & & Q'' & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & Q^{(n-1)} \end{bmatrix}$$
$$\times\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & (Q^{(n-2)})^{-1}CQ^{(n-2)} \\ & & & 1 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} 1 & Q^{-1}CQ & \cdots & Q^{-1}C^{n-1}Q \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & Q^{-1}CQ \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

と定理 2.2 より，(2.10) と同じ定数倍の正規化で

<u>定理 2.3</u> (2.14) $\dfrac{\tau^{(n)}}{\tau^{(0)}}=\det R_n$.

逆変換(2.7) は $Q^{-1}Y=Q^{-1}(\frac{d}{dx}-C)Q'Q'^{-1}Y'$ と書ける。これを Laplace 変換して

(2.14) $Z=\hat{Q}'(y-C)(\hat{Q}')^{-1}Z'$. 一般に $Z^{(-1+n)}=\hat{Q}^{(n)}(y-C)(\hat{Q}^{(n)})^{-1}Z^{(n)}$

を得る。定理 2.3 と同様に

(2.15) $(-)^{r\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{\tau^{(-n)}}{\tau^{(0)}}=\det R_n^*$, $R_n^*=R_n|_{(Q,P,A,C)\mapsto(P,-Q,C,-A)}$

も成り立つ。

行列 M の第 $i_1,\cdots,i_k$ 行と第 $j_1,\cdots,j_k$ 列 ($i_1<\cdots<i_k$, $j_1<\cdots<j_k$) とからできる k 次の小行列式を M_{IJ} ($I \underset{\mathrm{def.}}{=} (i_1,\cdots,i_k)$, $J \underset{\mathrm{def.}}{=} (j_1,\cdots,j_k)$) と書くとき

$Q^{(n)}$, $P^{(n)}$ の任意の小行列式 $Q^{(n)}_{I,J}$, $P^{(n)}_{I,J}$ の特異性について.

<u>定理 2.4</u>　S_j を $Q^{(j)}$, $P^{(j)}$, $\tau^{(j)}$ の特異点の全体とするとき. $\tau^{(n)}P^{(n)}_{I,J}$, $\tau^{(n)}Q^{(n)}_{I,J}$ ($n=0,\pm1,\pm2,\cdots$; $k=0,1,\cdots,r$; $k=\#(I)=\#(J)$) は全て $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} S_j$ の外で正則である。($k=0$ のとき $\tau^{(n)}P^{(n)}_{I,J}$, $\tau^{(n)}Q^{(n)}_{I,J}$ は共に $\tau^{(n)}$ である。)

<u>系 2.5</u>　τ と τ' が $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} S_j$ の外で互いに素ならば. $\tau^{(n)}Q^{(n)}P^{(n)}$, $\tau^{(n)}P^{(n)}Q^{(n)}$ も $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} S_j$ の外で正則である。

(2.6) と (2.14) を

$$(2.16)\quad \begin{pmatrix} Y(x) \\ Y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ -QAQ^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(x) \\ xY(x) \end{pmatrix}, \quad (({}'Z(y))^{-1}, Z(y)^{-1}) = (({}'Z(y))^{-1}, y({}'Z(y))^{-1}) \begin{pmatrix} 1 & -Q^{-1}CQ \\ & 1 \end{pmatrix}$$

のように書き直す ('Z は $Z^{(-1)}$ の略記)。$(2.13)_2$ の逆行列 $R_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -Q^{-1}CQ \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & \\ & Q' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \\ -QAQ^{-1} & 1 \end{bmatrix}$ を使うと (2.16) は

$$(({}'Z(y))^{-1}, y({}'Z(y))^{-1}) R_2^{-1} \begin{bmatrix} Y(x) \\ xY(x) \end{bmatrix} = (({}'Z(y))^{-1}, Z(y)^{-1}) \begin{bmatrix} Q & \\ & Q' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y(x) \\ Y'(x) \end{bmatrix}$$
$$= ({}'Z(y))^{-1} Q^{-1} Y(x) + Z(y)^{-1} Q'^{-1} Y'(x)$$

i.e. $\sum_{i,j=0}^{1} (R_2^{-1})_{ij}\, y^i x^j = {}'Z(y)\left(({}'Z(y))^{-1} Q^{-1} Y(x) + Z(y)^{-1} Q'^{-1} Y'(x) \right) Y(x)^{-1}$

にまとめられる。一般の n のときには

$$(2.17)\quad \sum_{i,j=0}^{n-1} (R_n^{-1})_{ij}\, y^i x^j = {}'Z(y) \left(\sum_{k=0}^{n-1} (Z^{(-1+k)}(y))^{-1} (Q^{(k)})^{-1} Y^{(k)}(x) \right) Y(x)^{-1}$$

となる。この恒等式の右辺は $(R_n^{-1})_{ij}$ の母函数の役割を果している。

3.　3節では最も簡単な <u>$P=0$</u> の場合を考察する。このとき

(3.1)　$\omega=0$. 故に $\tau=\mathrm{const.}$ で これを 1 に正規化する.

(3.2)　Ⓗ $=$ Ⓗ$^* = 0$, $dQ = dC\cdot QA + CQdA$. 故に $Q_{ij}(A,C) = e^{c_i a_j} Q_{ij}(0,0)$.

(3.3) $\quad dY = (C\,dx + x\,dC)Y$. 故に (1.11) を考慮して $Y(x; A, C) = e^{Cx}$.

そして $R_n = (R_{ij})_{i,j=0,1,\cdots,n-1}$ は (3.4) で与えられる.

(3.4) $\quad R_{ij} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} k!\binom{i}{k}\binom{j}{k} C^{j-k} Q A^{i-k}$.

例

$$R_4 = \begin{pmatrix} Q & CQ & C^2Q & C^3Q \\ QA & CQA+Q & C^2QA+2CQ & C^3QA+3C^2Q \\ QA^2 & CQA^2+2QA & C^2QA^2+4CQA+2Q & C^3QA^2+6C^2QA+6CQ \\ QA^3 & CQA^3+3QA^2 & C^2QA^3+6CQA^2+6QA & C^3QA^3+9C^2QA^2+18CQA+6Q \end{pmatrix}.$$

このとき $\Lambda^{(n)} = K^{(n)} = \begin{pmatrix} n & & \\ & \ddots & \\ & & n \end{pmatrix}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ であり，特異点 $x=a_1, \cdots, a_r$ は全て見かけの特異点．従って $Y(x)$ のモノドロミー構造は trivial になっている。τ函数の変換公式−定理2.3− は

(3.5) $\quad \tau^{(n)} = \det R_n$, $\quad R_n$ は (3.4) で，Q は (3.2) で各々与えられる．

となる。

ここで更に $r=2$ の場合に (3.5) の τ函数を実際に計算してみる。4節で述べるように，$A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} t & \\ & 0 \end{pmatrix}$ と取る。又 (2.11) を考慮して (3.2) から $Q = \begin{pmatrix} \xi & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\xi = \mathrm{const.}\,e^t$ と取る。このとき (3.4) の $2n\times 2n$ 行列 $R_n = (r_{ij})_{i,j=0,1,2,\cdots,2n-1}$ の行と列を同時に並べかえて作った $\tilde{R}_n = (r_{ij})_{i,j=0,2,\cdots,2n-2,1,3,\cdots,2n-1}$ は

(3.6) $$\tilde{R}_n = \left[\begin{array}{c|c} F_n G_n \xi - G_n F_n & G_n \\ \hline & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline F_n & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0! & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & & (n-1)! & & & & \\ \hline & & & & 0! & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & (n-1)! \end{array}\right]$$

の形をしている，但し．

(3.7) $$F_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 1 & \binom{n-1}{1} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \exp\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & n-1 \quad 0 \end{bmatrix}, \quad G_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{t}{1!} \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \exp\begin{bmatrix} 0 & t & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & t \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

とし，又，$J_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{n-1} \end{bmatrix}$ とする。 $J_n^2 = 1$, $F_n^{-1} = J_n F_n J_n$, $G_n^{-1} = J_n G_n J_n$, $\det F_n = \det G_n = 1$ を使うと

$$(3.8)\qquad \det(F_nG_n\xi - G_nF_n) = \det(\xi - J_nF_n^{-1}G_nF_nG_n^{-1}J_n) = \det(\xi - (F_nJ_nG_n)^2)$$

となる。(3.6) から $\det\tilde{R}_n = (0!1!\cdots(n-1)!)^2\det(\xi - (F_nJ_nG_n)^2)$ だから、

$$(3.9)\qquad \varphi^{(n)}(\lambda;t) = \det(\lambda - F_nJ_nG_n)\ :\ F_nJ_nG_n\text{ の特性多項式}$$

とおくと、(3.5) から

$$(3.10)\qquad \tau^{(n)}(\xi;t) = (1!\cdots(n-1)!)^2(-)^n\varphi^{(n)}(\sqrt{\xi};t)\varphi^{(n)}(-\sqrt{\xi};t)$$

である。(3.10) の定数ファクター $(1!\cdots(n-1)!)^2$ は (4.22) の正規化を使えばなくなる： $\tau_*^{(n)}(\xi;t) = (-)^n\varphi^{(n)}(\sqrt{\xi};t)\varphi^{(n)}(-\sqrt{\xi};t)$.

$$F_nJ_nG_n = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 1 & t-1 & \frac{t^2}{2}-t & & \\ 1 & t-2 & \frac{t^2}{2}-2t+1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & t-(n-1) & \cdots & \cdots & \end{bmatrix}$$

だから、(3.9), (3.10) の計算を実行して次の結果を得る。

$$(3.11)\qquad \varphi^{(0)} = 1,\quad \varphi^{(1)} = \lambda - 1,\quad \varphi^{(2)} = \lambda^2 - t\lambda - 1,\quad \varphi^{(3)} = \lambda^3 - (\tfrac{1}{2}t^2 - t + 1)\lambda^2 - (\tfrac{1}{2}t^2 + t + 1)\lambda + 1,$$

$$\varphi^{(4)} = \lambda^4 - (\tfrac{1}{6}t^3 - t^2 + 2t)\lambda^3 - (\tfrac{1}{12}t^4 + t^2 + 2)\lambda^2 + (\tfrac{1}{6}t^3 + t^2 + 2t)\lambda + 1,$$

$$\varphi^{(5)} = \lambda^5 - (\tfrac{1}{24}t^4 - \tfrac{1}{2}t^3 + 2t^2 - 2t + 1)\lambda^4 - (\tfrac{1}{144}t^6 - \tfrac{1}{24}t^5 + \tfrac{7}{24}t^4 - \tfrac{1}{2}t^3 + t^2 + 2t + 2)\lambda^3$$
$$+ (\tfrac{1}{144}t^6 + \tfrac{1}{24}t^5 + \tfrac{7}{24}t^4 + \tfrac{1}{2}t^3 + t^2 - 2t + 2)\lambda^2 + (\tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{1}{2}t^3 + 2t^2 + 2t + 1)\lambda - 1.$$

$$(3.12)\qquad \tau_*^{(0)} = 1,\quad \tau_*^{(1)} = \xi - 1,\quad \tau_*^{(2)} = (\xi-1)^2 - t^2\xi,\quad \tau_*^{(3)} = (\xi-1)^3 - 3t^2\xi(\xi-1) + t^3\xi(\xi+1) - \tfrac{1}{4}t^4\xi(\xi-1),$$

$$\tau_*^{(4)} = (\xi-1)^4 - 6t^2\xi(\xi-1)^2 + 4t^3\xi(\xi-1)(\xi+1) - \tfrac{1}{6}t^4\xi(11\xi^2 - 4\xi + 11) + \tfrac{1}{3}t^5\xi(\xi-1)(\xi+1) - \tfrac{1}{36}t^6\xi(\xi^2 - 8\xi + 1) + \tfrac{1}{144}t^8\xi^2,$$

$$\tau_*^{(5)} = (\xi-1)^5 - 10t^2\xi(\xi-1)^3 + 10t^3\xi(\xi-1)^2(\xi+1) - \tfrac{5}{3}t^4\xi(\xi-1)(4\xi^2 + \xi + 4) + \tfrac{1}{4}t^5\xi(\xi+1)(9\xi^2 - 10\xi + 9) - \tfrac{31}{72}t^6\xi(\xi-1)^3$$
$$+ \tfrac{1}{24}t^7\xi(\xi+1)(\xi^2 - 12\xi + 1) - \tfrac{1}{2^6\cdot 3^2}t^8\xi(\xi-1)(\xi^2 - 86\xi + 1) - \tfrac{5}{144}t^9\xi^2(\xi+1) + \tfrac{11}{2^6\cdot 3^3}t^{10}\xi^2(\xi-1) - \tfrac{1}{2^6\cdot 3^3}t^{11}\xi^2(\xi+1) + \tfrac{1}{2^8\cdot 3^4}t^{12}\xi^2(\xi-1).$$

4.

4 節では $\underline{r=2}$ の場合に話を限定する。(1.10) の $\tau(A,C)$, (1.8) の $\omega(A,C)$ でパラメーター $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ を特殊化することにより

$$(4.1)\qquad \tau_{\mathrm{I}}(t) = \tau\left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),\ \omega_{\mathrm{I}}(t) = \omega\left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right);\ \tau_{\mathrm{II}}(t) = \tau\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\right),\ \omega_{\mathrm{II}}(t) = \omega\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

とおく。$t \underset{\mathrm{def.}}{=} (c_1 - c_2)(a_1 - a_2)$ と取ると $\kappa_1 + \kappa_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ より

(4.2) $\omega(A,C) = \omega_{\mathrm{I}}(t) + \kappa_1 d(c_1a_2) + \lambda_1 d(c_2a_1) + (\kappa_2-\lambda_1)d(c_2a_2) + (\kappa_1-\lambda_1)(\kappa_2-\lambda_1)\, d\log(c_1-c_2),$

$= \omega_{\mathrm{II}}(t) + \kappa_1 d(c_1a_2) + \lambda_1 d(c_2a_1) + (\kappa_2-\lambda_1)d(c_2a_2) - (\kappa_1-\lambda_1)(\kappa_2-\lambda_1)\, d\log(a_1-a_2),$

$\tau(A,C) = e^{\kappa_1c_1a_2+\lambda_1c_2a_1+(\kappa_2-\lambda_1)c_2a_2}(c_1-c_2)^{(\kappa_1-\lambda_1)(\kappa_2-\lambda_1)}\tau_{\mathrm{I}}(t),$

$= e^{\kappa_1c_1a_2+\lambda_1c_2a_1+(\kappa_2-\lambda_1)c_2a_2}(a_1-a_2)^{-(\kappa_1-\lambda_1)(\kappa_2-\lambda_1)}\tau_{\mathrm{II}}(t),$

(4.3) $\omega_{\mathrm{II}}(t) = \omega_{\mathrm{I}}(t) + (\kappa_1-\lambda_1)(\kappa_2-\lambda_1)\, d\log t, \quad \tau_{\mathrm{II}}(t) = t^{(\kappa_1-\lambda_1)(\kappa_2-\lambda_1)}\tau_{\mathrm{I}}(t)$

である。従って $\omega(A,C)$, $\tau(A,C)$ は本質的に1変数 $t=(c_1-c_2)(a_1-a_2)$ の1 form であり、函数である。$Q(A,C)$, $P(A,C)$, $Y(x;A,C)$ の1変数 t への reduction もできて、

(4.4) $e^{c_2a_2}Q(A,C) = e^{Ca_2}(c_1-c_2)^{-K}Q_{\mathrm{I}}(t)e^{c_2A}(c_1-c_2)^{\Lambda} = e^{Ca_2}(a_1-a_2)^{K}Q_{\mathrm{II}}(t)e^{c_2A}(a_1-a_2)^{-\Lambda},$

$e^{-c_2a_2}P(A,C) = e^{-c_2A}(c_1-c_2)^{-\Lambda}P_{\mathrm{I}}(t)e^{-Ca_2}(c_1-c_2)^{K} = e^{-c_2A}(a_1-a_2)^{\Lambda}P_{\mathrm{II}}(t)e^{-Ca_2}(a_1-a_2)^{-K},$

$e^{-c_2(x-a_2)}Y(x;A,C) = e^{Ca_2}(c_1-c_2)^{-K}Y_{\mathrm{I}}((c_1-c_2)(x-a_2);t) = e^{Ca_2}(a_1-a_2)^{K}Y_{\mathrm{II}}\left(\frac{x-a_2}{a_1-a_2};t\right),$

(4.5) $Q_{\mathrm{II}}(t) = t^{-K}Q_{\mathrm{I}}(t)t^{\Lambda}, \quad P_{\mathrm{II}}(t) = t^{-\Lambda}P_{\mathrm{I}}(t)t^{K}, \quad Y_{\mathrm{II}}(x;t) = t^{-K}Y_{\mathrm{I}}(tx;t).$

I, II のどちらでやるかは問題に応じて選択すればよい。以後 II: $A=\begin{pmatrix}1&\\&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}t&\\&0\end{pmatrix}$ の場合で話を進めることにし、添字IIは省略する。

このとき方程式(1.9), (1.3), (1.5)は

(4.6) $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\Q_{21}&Q_{22}\end{pmatrix} = \frac{1}{t}\begin{pmatrix}0&(QP)_{12}\\(QP)_{21}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\Q_{21}&Q_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}Q_{11}&0\\0&0\end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{21}&P_{22}\end{pmatrix} = -\frac{1}{t}\begin{pmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{21}&P_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&(QP)_{12}\\(QP)_{21}&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}P_{11}&0\\0&0\end{pmatrix},$

(4.7) $\left(\left(x - \frac{1}{\det Q}\begin{pmatrix}Q_{11}\\Q_{21}\end{pmatrix}(Q_{22}, -Q_{12})\right)\left(\frac{d}{dx} - \begin{pmatrix}t&\\&0\end{pmatrix}\right) - QP\right)Y = 0,$

$\frac{\partial}{\partial t}Y = \begin{pmatrix}x & \frac{1}{t}(QP)_{12}\\ \frac{1}{t}(QP)_{21} & 0\end{pmatrix}Y$

となり、(1.8)は

(4.8) $\frac{d}{dt}\log\tau(t) = \frac{1}{t}(QP)_{12}(QP)_{21} + Q_{11}P_{11}$

となる。

特に、(4.6) は $y(t) \underset{\text{def.}}{=} \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$ に関して次の Painlevé V 型方程式に帰着される [6], [7].

$$
(4.9) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + \frac{(y-1)^2}{t^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma}{t}y - \frac{1}{2}\frac{y(y+1)}{y-1},
$$

$$
\alpha = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \kappa_2)^2, \quad \beta = -\frac{1}{2}(\lambda_1 - \kappa_1)^2, \quad \gamma = -(1 + \kappa_1 + \kappa_2).
$$

τ 函数は、この y と

$$
(4.10) \qquad t\frac{d}{dt}\log\tau + \kappa_1(\lambda_1 - \kappa_2) = \frac{1}{4y(y-1)^2}\left\{\left(t\frac{dy}{dt}\right)^2 - \Big(ty - (y-1)\big((\lambda_1-\kappa_2)y - (\lambda_1+\kappa_1)\big)\Big)^2\right\} + \frac{\lambda_1\kappa_1}{y}
$$

で結ばれている。τ の満たす方程式は広田[3]の意味で

$$
(4.11) \qquad \begin{cases} D_t^2\,\tau\cdot\tau + 2D_t\,\tau\cdot\dot{\tau} = 0, \\ \left[t^3D_t^4 - t\left(t^2 + 2(2\lambda_1+\kappa_1-\kappa_2)t + (\kappa_1-\kappa_2)^2 - 2\right)D_t^2 - 2\kappa_1(\lambda_1-\kappa_2)(t+\kappa_1-\kappa_2)\right]\tau\cdot\tau \\ \qquad + 2\left[4t^2D_t^2 - (2\lambda_1+\kappa_1-\kappa_2)t - (\kappa_1-\kappa_2)^2\right]\tau\cdot\dot{\tau} + 4t\,\dot{\tau}\cdot\dot{\tau} = 0 \end{cases}
$$

で与えられる (cf. [9]; [15])。

定理2.4 と 系2.5 から

$$
(4.12) \qquad Q^{(n)} = \frac{1}{\tau^{(n)}}\begin{pmatrix} \alpha_1^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \\ \alpha_3^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \end{pmatrix}, \quad P^{(n)} = \frac{1}{\tau^{(n)}}\begin{pmatrix} \alpha_4^{(n-1)} & -\alpha_2^{(n-1)} \\ -\alpha_3^{(n-1)} & \alpha_1^{(n-1)} \end{pmatrix},
$$

$$
Q^{(n)}P^{(n)} = \frac{1}{\tau^{(n)}}\begin{pmatrix} (n+\kappa_1)\tau^{(n)} & \beta_2^{(n)} \\ \beta_3^{(n)} & (n+\kappa_2)\tau^{(n)} \end{pmatrix}, \quad P^{(n)}Q^{(n)} = \frac{1}{\tau^{(n)}}\begin{pmatrix} (n+\lambda_1)\tau^{(n)} & \gamma_2^{(n)} \\ \gamma_3^{(n)} & (n+\lambda_2)\tau^{(n)} \end{pmatrix}
$$

とおける。このとき、これらの量の間には、

$$
(4.13) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_4^{(n-1)} & \alpha_3^{(n-1)} \\ \alpha_2^{(n)} & \alpha_1^{(n)} \end{vmatrix} = (n+\kappa_1)(\tau^{(n)})^2, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n-1)} & \alpha_2^{(n-1)} \\ \alpha_3^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \end{vmatrix} = (n+\kappa_2)(\tau^{(n)})^2,
$$

$$
\begin{vmatrix} \alpha_4^{(n-1)} & \alpha_2^{(n-1)} \\ \alpha_3^{(n)} & \alpha_1^{(n)} \end{vmatrix} = (n+\lambda_1)(\tau^{(n)})^2, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n-1)} & \alpha_3^{(n-1)} \\ \alpha_2^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \end{vmatrix} = (n+\lambda_2)(\tau^{(n)})^2,
$$

$$
\begin{vmatrix} \alpha_2^{(n-1)} & \alpha_3^{(n-1)} \\ \alpha_2^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \end{vmatrix} = (\kappa_1-\lambda_1)(\tau^{(n)})^2, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n-1)} & \alpha_4^{(n-1)} \\ \alpha_1^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \end{vmatrix} = (\kappa_2-\lambda_1)(\tau^{(n)})^2,
$$

$$
\begin{vmatrix} \alpha_1^{(n-1)} & \alpha_2^{(n-1)} \\ \alpha_1^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \end{vmatrix} = \beta_2^{(n)}\tau^{(n)}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_4^{(n-1)} & \alpha_3^{(n-1)} \\ \alpha_4^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \end{vmatrix} = \beta_3^{(n)}\tau^{(n)},
$$

$$
\begin{vmatrix} \alpha_4^{(n-1)} & \alpha_2^{(n-1)} \\ \alpha_4^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \end{vmatrix} = \gamma_2^{(n)}\tau^{(n)}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n-1)} & \alpha_3^{(n-1)} \\ \alpha_1^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \end{vmatrix} = \gamma_3^{(n)}\tau^{(n)},
$$

の関係がある。変換公式(2.1), (2.6), (2.11)から更に次の関係が得られる。これは $\tau^{(n)}$, $\beta_j^{(n)}$, $\gamma_j^{(n)}$, $\alpha_i^{(n)}$, $Y^{(n)}$ から順に $\tau^{(n+1)}$, $\beta_j^{(n+1)}$, $\gamma_j^{(n+1)}$, $\alpha_i^{(n+1)}$, $Y^{(n+1)}$ を計算するのに役立つ。

命題4.1

(4.14) $$\tau^{(n)}\tau^{(n+1)} = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \\ \alpha_3^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \end{vmatrix}.$$

(4.15) $$\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \beta_2^{(n)} \\ \tau^{(n+1)} & \beta_2^{(n+1)} \end{vmatrix} = -t\,\alpha_1^{(n)}\alpha_2^{(n)}, \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \beta_3^{(n)} \\ \tau^{(n+1)} & \beta_3^{(n+1)} \end{vmatrix} = -t\,\alpha_3^{(n)}\alpha_4^{(n)}.$$

(4.15)* $$\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \gamma_2^{(n)} \\ \tau^{(n+1)} & \gamma_2^{(n+1)} \end{vmatrix} = -t\,\alpha_2^{(n)}\alpha_4^{(n)}, \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \gamma_3^{(n)} \\ \tau^{(n+1)} & \gamma_3^{(n+1)} \end{vmatrix} = -t\,\alpha_1^{(n)}\alpha_3^{(n)}.$$

(4.16) $$\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_1^{(n)} \\ (n+1+\kappa_1)\tau^{(n+1)} & \alpha_1^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_3^{(n)}\beta_2^{(n+1)}, \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \\ (n+1+\kappa_1)\tau^{(n+1)} & \alpha_2^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_4^{(n)}\beta_2^{(n+1)},$$
$$\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \\ (n+1+\kappa_2)\tau^{(n+1)} & \alpha_3^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_1^{(n)}\beta_3^{(n+1)}, \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ (n+1+\kappa_2)\tau^{(n+1)} & \alpha_4^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_2^{(n)}\beta_3^{(n+1)}.$$

(4.16)* $$\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_1^{(n)} \\ (n+1+\lambda_1)\tau^{(n+1)} & \alpha_1^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_2^{(n)}\gamma_3^{(n+1)}, \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \\ (n+1+\lambda_2)\tau^{(n+1)} & \alpha_2^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_1^{(n)}\gamma_2^{(n+1)},$$
$$\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \\ (n+1+\lambda_1)\tau^{(n+1)} & \alpha_3^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_4^{(n)}\gamma_3^{(n+1)}, \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ (n+1+\lambda_2)\tau^{(n+1)} & \alpha_4^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_3^{(n)}\gamma_2^{(n+1)}.$$

(4.17) $$\begin{vmatrix} \alpha_2^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \\ \beta_2^{(n+1)} & \gamma_3^{(n+1)} \end{vmatrix} = (\kappa_1-\lambda_1)\,\alpha_1^{(n)}\tau^{(n+1)}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ \beta_2^{(n+1)} & \gamma_2^{(n+1)} \end{vmatrix} = (\kappa_1-\lambda_2)\,\alpha_2^{(n)}\tau^{(n+1)},$$
$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ \gamma_3^{(n+1)} & \beta_3^{(n+1)} \end{vmatrix} = (\kappa_1-\lambda_2)\,\alpha_3^{(n)}\tau^{(n+1)}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_2^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \\ \gamma_2^{(n+1)} & \beta_3^{(n+1)} \end{vmatrix} = (\kappa_1-\lambda_1)\,\alpha_4^{(n)}\tau^{(n+1)}.$$

(4.18) $$Y^{(n+1)} = \left(x - \frac{1}{\tau^{(n)}\tau^{(n+1)}} \begin{pmatrix} \alpha_1^{(n)} \\ \alpha_3^{(n)} \end{pmatrix} \left(\alpha_4^{(n)}, -\alpha_2^{(n)} \right) \right) Y^{(n)}.$$

命題4.2

(4.19) $$t^2 \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \dfrac{d\tau^{(n)}}{dt} \\ \dfrac{d\tau^{(n)}}{dt} & \dfrac{d^2\tau^{(n)}}{dt^2} \end{vmatrix} = -\beta_2^{(n)}\beta_3^{(n)} = \begin{vmatrix} \tau^{(n-1)} & (n+\kappa_2)\tau^{(n)} \\ (n+\kappa_1)\tau^{(n)} & \tau^{(n+1)} \end{vmatrix}.$$

$\tau^{(n)} = t^{(n+\kappa_1)(n+\kappa_2)}\tilde{\tau}^{(n)}$, $\tilde{\tau}^{(n)} = e^{\frac{1}{2}t^2} f_n$ とおけば(4.19)は

(4.20) $$\begin{vmatrix} \tilde{\tau}^{(n)} & \dfrac{d\tilde{\tau}^{(n)}}{dt} \\ \dfrac{d\tilde{\tau}^{(n)}}{dt} & \dfrac{d^2\tilde{\tau}^{(n)}}{dt^2} \end{vmatrix} = \tilde{\tau}^{(n-1)}\tilde{\tau}^{(n+1)},$$

(4.21) $$\begin{vmatrix} f_n & \dfrac{df_n}{dt} \\ \dfrac{df_n}{dt} & \dfrac{d^2 f_n}{dt^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{vmatrix}$$

に書き直される。(4.21)は戸田格子の方程式に他ならない[4]。

τ函数の定数倍の正規化を(2.10)の代りに

$$(4.22) \qquad \det Q^{(n)} = (n+\kappa_1)!\,(n+\kappa_2)!\,\frac{\tau_*^{(n+1)}}{\tau_*^{(n)}}$$

とすれば、(4.19) は

$$(4.19)_* \qquad t^2\begin{vmatrix} \tau_*^{(n)} & \frac{d\tau_*^{(n)}}{dt} \\ \frac{d\tau_*^{(n)}}{dt} & \frac{d^2\tau_*^{(n)}}{dt^2}\end{vmatrix} = (n+\kappa_1)(n+\kappa_2)\begin{vmatrix} \tau_*^{(n-1)} & \tau_*^{(n)} \\ \tau_*^{(n)} & \tau_*^{(n+1)}\end{vmatrix}$$

となる。$(4.19)_*$ から戸田方程式 (4.21)への変換は $f_n = a_n\tau_*^{(n)}$, $a_n = G(n+1+\kappa_1)\,G(n+1+\kappa_2)\,t^{-(n+\kappa_1)(n+\kappa_2)}\,e^{-\frac{1}{2}t^2}$ によってなされる。ここで $G(z)$ は G 函数で、$\Gamma(z) = \frac{G(z+1)}{G(z)}$, $G(n+1) = 1!\cdots(n-1)!$ の性質をもつ [1]。ここで f_n のみならず、変換するファクター a_n も戸田方程式を満たすことを注意しておこう。

変形方程式 (4.6) は'τ函数'[15] で書けば、次の二次形式をとる。

$$(4.23) \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_1^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_1^{(n)}}{dt}\end{vmatrix} - \alpha_1^{(n)}\tau^{(n)} = \frac{1}{t}\alpha_3^{(n)}\beta_2^{(n)}, \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_2^{(n)}}{dt}\end{vmatrix} = \frac{1}{t}\alpha_4^{(n)}\beta_2^{(n)},$$

$$\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_3^{(n)}}{dt}\end{vmatrix} = \frac{1}{t}\alpha_1^{(n)}\beta_3^{(n)}, \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_4^{(n)}}{dt}\end{vmatrix} = \frac{1}{t}\alpha_2^{(n)}\beta_3^{(n)}.$$

$$\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_1^{(n+1)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_1^{(n+1)}}{dt}\end{vmatrix} = \frac{1}{t}\alpha_3^{(n+1)}\beta_2^{(n)}, \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_2^{(n+1)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_2^{(n+1)}}{dt}\end{vmatrix} = \frac{1}{t}\alpha_4^{(n)}\beta_2^{(n)},$$

$$\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_3^{(n+1)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_3^{(n+1)}}{dt}\end{vmatrix} = \frac{1}{t}\alpha_1^{(n+1)}\beta_3^{(n)}, \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_4^{(n+1)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_4^{(n+1)}}{dt}\end{vmatrix} + \alpha_4^{(n+1)}\tau^{(n)} = \frac{1}{t}\alpha_2^{(n+1)}\beta_3^{(n)}.$$

$$(4.24) \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \beta_2^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\beta_2^{(n)}}{dt}\end{vmatrix} + \frac{\kappa_1-\kappa_2}{t}\beta_2^{(n)}\tau^{(n)} = -\alpha_2^{(n+1)}\alpha_1^{(n)}, \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \beta_3^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\beta_3^{(n)}}{dt}\end{vmatrix} - \frac{\kappa_1-\kappa_2}{t}\beta_3^{(n)}\tau^{(n)} = -\alpha_4^{(n+1)}\alpha_3^{(n)},$$

$$\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \gamma_2^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\gamma_2^{(n)}}{dt}\end{vmatrix} = -\alpha_4^{(n+1)}\alpha_2^{(n)}, \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \gamma_3^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\gamma_3^{(n)}}{dt}\end{vmatrix} = -\alpha_3^{(n+1)}\alpha_1^{(n)}.$$

<u>命題 4.3</u>

$$(4.25) \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \tau^{(n+1)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\tau^{(n+1)}}{dt}\end{vmatrix} = \alpha_1^{(n)}\alpha_4^{(n)}.$$

$$(4.26) \qquad \tau^{(n)}\frac{d\tau^{(n)}}{dt} = \frac{1}{t}\beta_2^{(n)}\beta_3^{(n)} + \alpha_4^{(n-1)}\alpha_1^{(n)}.$$

$$(4.27) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \\ \frac{d\alpha_1^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_2^{(n)}}{dt}\end{vmatrix} + \alpha_1^{(n)}\alpha_2^{(n)} = \frac{1}{t}\beta_2^{(n)}\tau^{(n+1)}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_3^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ \frac{d\alpha_3^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_4^{(n)}}{dt}\end{vmatrix} = -\frac{1}{t}\beta_3^{(n)}\tau^{(n+1)},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ \frac{d\alpha_1^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_4^{(n)}}{dt}\end{vmatrix} + \alpha_1^{(n)}\alpha_4^{(n)} = \frac{1}{t^2}\begin{vmatrix} \beta_2^{(n)} & \beta_3^{(n)} \\ \beta_2^{(n+1)} & \beta_3^{(n+1)}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \\ \frac{d\alpha_2^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_3^{(n)}}{dt}\end{vmatrix}.$$

5.　5節では $r=2$ の場合の例を二つ挙げる。例1は、3節でτ函数を計算した $P=0$ の場合であり、例2は $B_1=0$ の場合である。これら二つの例では、実際には、I: $A=\begin{pmatrix} t & \\ & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0\end{pmatrix}$ として考える方が簡単なので (4.6), (4.7) に相当する方程式を書いておく。今、$dA=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0\end{pmatrix}dt$, $dC=0$、従って、$\Theta=0$ で、このとき (1.9), (1.1), (1.5) は次のようになる。

(5.1)　$\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22}\end{pmatrix} = \dfrac{1}{t}\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & (PQ)_{12} \\ (PQ)_{21} & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22}\end{pmatrix} = -\dfrac{1}{t}\begin{pmatrix} 0 & (PQ)_{12} \\ (PQ)_{21} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$,

(5.2)　$\dfrac{d}{dx}Y = \left(\dfrac{B_1}{x-t} + \dfrac{B_2}{x} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0\end{pmatrix}\right)Y$,　$\dfrac{\partial}{\partial t}Y = -\dfrac{1}{\det Q}\begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{21}\end{pmatrix}(Q_{22}, -Q_{12})\left(\dfrac{d}{dx} - \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0\end{pmatrix}\right)Y$.

<u>例1.</u>　$P=0$.

　このとき、$QP=0$, $PQ=0$。故に、$K=\Lambda=0$. (4.5) から $Q_{\mathrm{II}} = Q_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} \xi & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$, 従って、(3.4) から $R_{n,\mathrm{II}} = {}^t(R_{n,\mathrm{I}})$ がわかり、(3.5) から $\tau_{\mathrm{II}}^{(n)} = \tau_{\mathrm{I}}^{(n)}$。これは (4.3) からも言えている。(4.22) のように正規化した $\tau_*^{(n)}$ を使うと、この $P^{(0)}=0$ の場合、(4.12) は

(5.3)　$Q^{(n)} = \dfrac{n!}{\tau_*^{(n)}}\begin{pmatrix} \xi\alpha^{(n)} & \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\alpha}^{(n)} & \alpha^{(n)}\end{pmatrix}$, $P^{(n)} = \dfrac{1}{(n-1)!\,\tau_*^{(n)}}\begin{pmatrix} \alpha^{(n-1)} & -\tilde{\alpha}^{(n-1)} \\ -\tilde{\alpha}^{(n-1)} & \xi\alpha^{(n-1)}\end{pmatrix}$,

$$B^{(n)} = \frac{n}{\tau_*^{(n)}}\begin{pmatrix} \tau_*^{(n)} & -t\xi\beta^{(n-1)} \\ -t\beta^{(n-1)} & \tau_*^{(n)}\end{pmatrix}$$

の形をしていることがわかる。但し、$p(\xi,t) \in \mathbb{C}[\xi,t]$, $\deg_\xi p = n$（多項式 p の ξ に関する次数が n であることを $\deg_\xi p = n$ と記す）に対して、

(5.4)　$\tilde{p}(\xi,t) = (-\xi)^n p(\xi^{-1}, -t)$

と定義する。命題4.1（のIの場合）から次の結果を得る。この場合のτ函数の変換公式は [10] に与えられている。

(5.5) $\tau_*^{(n)} \in \mathbb{Q}[\xi,t]$, $\deg_\xi \tau_*^{(n)} = n$, $\deg_t \tau_*^{(n)} = [\frac{n^2}{2}]$, $\tau_*^{(n)}(\xi,0) = (\xi-1)^n$,

$\tau_*^{(n)}(0,t) = (-)^n$, $\tilde{\tau}_*^{(n)} = \tau_*^{(n)}$.

$\tau_*^{(n)}$ の計算結果は (3.12) の通りである。

(5.6) $\beta^{(n)} \in \mathbb{Q}[\xi,t]$, $\deg_\xi \beta^{(n)} = n$, $\deg_t \beta^{(n)} = [\frac{n^2}{2}] + n$, $\beta^{(n)}(\xi,0) = (\xi-1)^n$,

$\beta^{(n)}(0,t) = (-)^n F(-n,2;-t) = (-)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{t^k}{(1+k)!}$, $\widetilde{\beta^{(n)}} = \beta^{(n)}$.

$\beta^{(0)} = 1$, $\beta^{(1)} = \xi - 1 - \frac{1}{2}t(\xi+1)$, $\beta^{(2)} = (\xi-1)^2 - t(\xi-1)(\xi+1) + \frac{1}{6}t^2(\xi^2+4\xi+1) + \frac{1}{12}t^4\xi$,

$\beta^{(3)} = (\xi-1)^3 - \frac{3}{2}t(\xi-1)^2(\xi+1) + \frac{1}{2}t^2(\xi-1)(\xi^2+4\xi+1) - \frac{1}{24}t^3(\xi+1)(\xi^2+10\xi+1) + \frac{5}{12}t^4\xi(\xi-1)$

$\quad - \frac{1}{6}t^5\xi(\xi+1) + \frac{1}{36}t^6\xi(\xi-1) - \frac{1}{288}t^7\xi(\xi+1)$.

(5.7) $\alpha^{(n)} \in \mathbb{Q}[\xi,t]$, $\deg_\xi \alpha^{(n)} = n$, $\deg_t \alpha^{(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$, $\alpha^{(n)}(\xi,0) = (\xi-1)^n$, $\widetilde{\alpha^{(n)}}$ も

同じ性質をもつ。

$\alpha^{(0)} = 1$, $\alpha^{(1)} = \xi - 1 - t$, $\alpha^{(2)} = (\xi-1)^2 - 2t(\xi-1) + \frac{1}{2}t^2(\xi+1) - \frac{1}{2}t^3\xi$,

$\alpha^{(3)} = (\xi-1)^3 - 3t(\xi-1)^2 + \frac{3}{2}t^2(\xi-1)(\xi+1) - \frac{1}{6}t^3(13\xi^2-8\xi+1) + \frac{1}{12}t^4\xi(7\xi+11) - \frac{1}{12}t^5\xi(\xi-2) + \frac{1}{24}t^6\xi$.

$\widetilde{\alpha^{(0)}} = 1$, $\widetilde{\alpha^{(1)}} = \xi - 1 - t\xi$, $\widetilde{\alpha^{(2)}} = (\xi-1)^2 - 2t\xi(\xi-1) + \frac{1}{2}t^2\xi(\xi+1) + \frac{1}{2}t^3\xi$,

$\widetilde{\alpha^{(3)}} = (\xi-1)^3 - 3t\xi(\xi-1)^2 + \frac{3}{2}t^2\xi(\xi-1)(\xi+1) - \frac{1}{6}t^3\xi(\xi^2-8\xi+13) - \frac{1}{12}t^4\xi(11\xi+7) + \frac{1}{12}t^5\xi(2\xi-1) - \frac{1}{24}t^6\xi^2$.

(5.8) $\begin{vmatrix} \tau^{(n-1)} & \tau^{(n+1)} \\ \frac{d\tau^{(n-1)}}{dt} & \frac{d\tau^{(n+1)}}{dt} \end{vmatrix} = \xi\left(2\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)} - t^2(\beta^{(n-1)})^2\right)$ (cf. [10])

(5.9) $Y^{(0)} = \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y^{(1)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(1)} \\ Y_2^{(1)} \end{pmatrix}$, $Y_1^{(1)} = xu - \frac{t\xi}{\xi-1}(u-1)$, $Y_2^{(1)} = x - \frac{t}{\xi-1}(u-1)$,

$u = \mathrm{const.}\, e^x$.

例 2. $B_1 = 0$.

このとき、Yの線型方程式(5.2)は $\frac{d}{dx}Y = \left(\frac{B}{x} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}\right)Y$, $B = \begin{pmatrix} \kappa_1 & B_{12} \\ B_{21} & \kappa_2 \end{pmatrix}$ の形をしており、確定特異点 $x=0$ での指数は $\kappa_1+\kappa_2$ と 0 である。変形方程式(5.1)を解いて、

$Q^{(0)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{t}(\kappa_2\zeta+\eta) & 1\\ -\zeta+\frac{1}{t}(\kappa_2\zeta+\eta) & 1\end{bmatrix}$, $P^{(0)}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \kappa_1 & \kappa_2\end{bmatrix}$ を得る。但し ζ, η は

(5.10) $\quad t\frac{d}{dt}\zeta=\kappa_2\zeta+\eta,\quad t\frac{d}{dt}\eta=(1+\kappa_1)\kappa_2\zeta+(1+\kappa_1+t)\eta$

の解、即ち $\zeta=C_1\cdot F(-\kappa_2,-\kappa_1-\kappa_2;t)+C_2\cdot t^{1+\kappa_1+\kappa_2}F(1+\kappa_1,2+\kappa_1+\kappa_2;t)$,

$\eta=t\frac{d}{dt}\zeta-\kappa_2\zeta=(-\kappa_2)\left(C_1\cdot F(1-\kappa_2,-\kappa_1-\kappa_2;t)+C_2\cdot t^{1+\kappa_1+\kappa_2}F(2+\kappa_1,2+\kappa_1+\kappa_2;t)\right)$

(C_1, C_2 は定数) である。$Q^{(0)}, P^{(0)}$ が求まったので、Y の方程式 (5.2) は具体的に書き下せる：

(5.11) $$\left(\left(x-\frac{1}{\zeta}\begin{pmatrix}\kappa_2\zeta+\eta\\(\kappa_2-t)\zeta+\eta\end{pmatrix}(1,-1)\right)\left(\frac{d}{dx}-\begin{pmatrix}1&\\&0\end{pmatrix}\right)-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(\kappa_1,\kappa_2)\right)Y=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Y=-\frac{1}{\zeta}\begin{pmatrix}\frac{1}{t}(\kappa_2\zeta+\eta)\\-\zeta+\frac{1}{t}(\kappa_2\zeta+\eta)\end{pmatrix}(1,-1)\left(\frac{d}{dx}-\begin{pmatrix}1&\\&0\end{pmatrix}\right)Y.$$

w, v を

(5.12) $\quad \frac{d}{dx}w=w+v,\quad x\frac{d}{dx}v=\kappa_1 w+(\kappa_1+\kappa_2)v$

の解、即ち $w=C_3\cdot F(-\kappa_2,-\kappa_1-\kappa_2;x)+C_4\cdot x^{1+\kappa_1+\kappa_2}F(1+\kappa_1,2+\kappa_1+\kappa_2;x)$,

$v=\frac{d}{dx}w-w=-\frac{\kappa_1}{\kappa_1+\kappa_2}\left(C_3\cdot F(-\kappa_2,1-\kappa_1-\kappa_2;x)+C_4\cdot x^{\kappa_1+\kappa_2}F(\kappa_1,1+\kappa_1+\kappa_2;x)\right)$ (C_3, C_4：定数)

とすれば、$Y^{(0)}=\begin{pmatrix}w+v\\v\end{pmatrix}$ は (5.11) を満たす。

ここで $\tau_{II}^{(0)}=t^{\kappa_1\kappa_2}$ 及び $\tau_{II}^{(1)}=t^{\kappa_1\kappa_2}\zeta$ と (4.10) で結ばれている $y^{(0)}$ 及び $y^{(1)}$ は Riccati 方程式 $t\frac{d}{dt}y^{(0)}=-ty^{(0)}-(y^{(0)}-1)(\kappa_2y^{(0)}+\kappa_1)$ 及び $t\frac{d}{dt}y^{(1)}=ty^{(1)}+(y^{(1)}-1)((1+\kappa_2)y^{(1)}+(1+\kappa_1))$ を満足している [10] ことに注意する。(4.3) より $\tau_{II}^{(n)}=t^{\kappa_1\kappa_2}\tau_{I}^{(n)}$ だから、(4.19) を $\tau_I^{(n)}$ について書き直すと

(5.13) $$\begin{vmatrix}\tau_I^{(n)} & t\frac{d\tau_I^{(n)}}{dt}\\ t\frac{d\tau_I^{(n)}}{dt} & t^2\frac{d^2\tau_I^{(n)}}{dt^2}-\kappa_1\kappa_2\tau_I^{(n)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\tau_I^{(n+1)} & (n+\kappa_2)\tau_I^{(n)}\\ (n+\kappa_1)\tau_I^{(n)} & \tau_I^{(n-1)}\end{vmatrix}$$

となる。(5.13) と命題 4.1 (の I の場合) から次の結果を得る。

(5.14) $\quad \tau_I^{(0)}=1,\quad \tau_I^{(1)}=\zeta,\quad \tau_I^{(2)}=((1+\kappa_1)\zeta-\eta)((1+\kappa_2)\zeta+\eta)+t\zeta\eta,$

$$\tau_I^{(3)} = (2+\kappa_1+\kappa_2)((1+\kappa_1)\zeta-\eta)^2\{(2+4\kappa_2+\kappa_1\kappa_2+\kappa_2^2)\zeta+(4+\kappa_1+\kappa_2)\eta\}+(1+\kappa_1)^2\kappa_2 t(2+2\kappa_1+t)\zeta^3$$
$$+(1+\kappa_1)t\{(12+11\kappa_1+5\kappa_2+3\kappa_1^2-\kappa_1\kappa_2+2\kappa_2^2)+(4+3\kappa_1-\kappa_2)t+t^2\}\zeta^2\eta$$
$$-t\{(12+12\kappa_1+6\kappa_2+4\kappa_1^2+2\kappa_2^2)+(1+2\kappa_1-\kappa_2)t\}\zeta\eta^2+(\kappa_1-\kappa_2)t\eta^3.$$

(5.15) (4.12) の記号で) $\alpha_1^{(-1)}=\kappa_2,\ \alpha_2^{(-1)}=0,\ \alpha_3^{(-1)}=\kappa_1,\ \alpha_4^{(-1)}=0\ ;\ \alpha_1^{(0)}=\frac{1}{t}(\kappa_2\zeta+\eta),$
$\alpha_2^{(0)}=1,\ \alpha_3^{(0)}=-\zeta+\frac{1}{t}(\kappa_2\zeta+\eta),\ \alpha_4^{(0)}=1\ ;\ \alpha_1^{(1)}=\frac{1}{t}((1+\kappa_1)\zeta-\eta)(\kappa_2\zeta+\eta)+\zeta\eta,$
$\alpha_2^{(1)}=(1+\kappa_1)\zeta-\eta,\ \alpha_3^{(1)}=\frac{1}{t}((1+\kappa_1+t)\zeta-\eta)(\kappa_2\zeta+\eta)-(1+\kappa_2)\zeta^2,\ \alpha_4^{(1)}=(1+\kappa_1+t)\zeta-\eta.$

(5.16) $\beta_2^{(0)}=\kappa_2,\ \beta_3^{(0)}=\kappa_1\ ;\ \beta_2^{(1)}=-\eta,\ \beta_3^{(1)}=(\kappa_1-\kappa_2+t)\zeta-\eta\ ;\ \beta_2^{(2)}=-(1+\kappa_1)^2\kappa_2\zeta^2-(1+\kappa_1)\times$
$(2+\kappa_1-\kappa_2+t)\zeta\eta+(2+\kappa_1)\eta^2,\ \beta_3^{(2)}=((1+\kappa_1+t)^2-(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)^2)\zeta^2-\{(2+3\kappa_1-\kappa_2+\kappa_1\kappa_2-\kappa_2^2)+(3+\kappa_2)t\}\zeta\eta$
$+(2+\kappa_2)\eta^2.$

(5.17) $Y^{(n)}=\begin{bmatrix}Y_1^{(n)}\\ Y_2^{(n)}\end{bmatrix}$ とするとき. $Y_1^{(0)}=w+v,\ Y_2^{(0)}=v\ ;\ Y_1^{(1)}=(x-\kappa_2-\frac{\eta}{\zeta})w+xv,$
$Y_2^{(1)}=(t-\kappa_2-\frac{\eta}{\zeta})w+xv\ ;\ Y_1^{(2)}=(x-1-\kappa_1-\kappa_2)(x-t)w+x(x-t)v+\frac{(1+\kappa_1)\zeta-\eta}{\tau_I^{(2)}}\{$
$(((x-1-\kappa_1-\kappa_2)t+(1+\kappa_1)x)\zeta-x\eta)w+xt\zeta v\},\ Y_2^{(2)}=-(1+\kappa_1+\kappa_2)(x-t)w+x(x-t)v$
$+\frac{(1+\kappa_1+t)\zeta-(1+t)\eta}{\tau_I^{(2)}}\{(((x-1-\kappa_1-\kappa_2)t+(1+\kappa_1)x)\zeta-x\eta)w+xt\zeta v\}.$

参考文献

[1] E.W. Barnes, Quart. J. Math. 31 (1900) 264.

[2] L. Schlesinger, J. Reine u. Angew. Math. 141 (1912) 96.

[3] R. Hirota, Lect. Notes in Math. 515, Springer (1976) 40.

[4] R. Hirota and J. Satsuma, Prog. Theor. Phys. Suppl. 59 (1976) 64.

[5] K. Ueno, Monodromy preserving deformation of linear differential equations with irregular singular points, RIMS preprint 301 (1979).

[6] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri and M. Sato, Density matrix of an impenetrable bose gas and the fifth Painlevé transcendent, RIMS preprint 303 (1979), Physica D1 (1980), in press.

[7] M. Jimbo, T. Miwa, M. Sato and Y. Môri, Holonomic quantum fields — The unanticipated link between deformation theory of differential equations and quantum fields —, RIMS preprint 305 (1979).

[8] K. Okamoto, Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations I, II, preprint, Tokyo Univ. (1980).

[9] 大石進一, 広田の方法, 逆散乱法, Bäcklund 変換の間の関係について, RIMS講究録 375 (1980) 112.

[10] 毛織泰子, Painlevé V 型方程式の解について, 同上 74.

[11] M. Jimbo and T. Miwa, Deformation of linear ordinary differential equations I, RIMS preprint 315 (1980).

[12] M. Jimbo and T. Miwa, —— II, RIMS preprint 316 (1980).

[13] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients I, RIMS preprint 319 (1980).

[14] Y. Môri, On τ functions of a class of Painlevé type equations I, RIMS preprint 320 (1980).

[15] M. Jimbo and T. Miwa, [13] と同題 II, RIMS preprint 327 (1980).